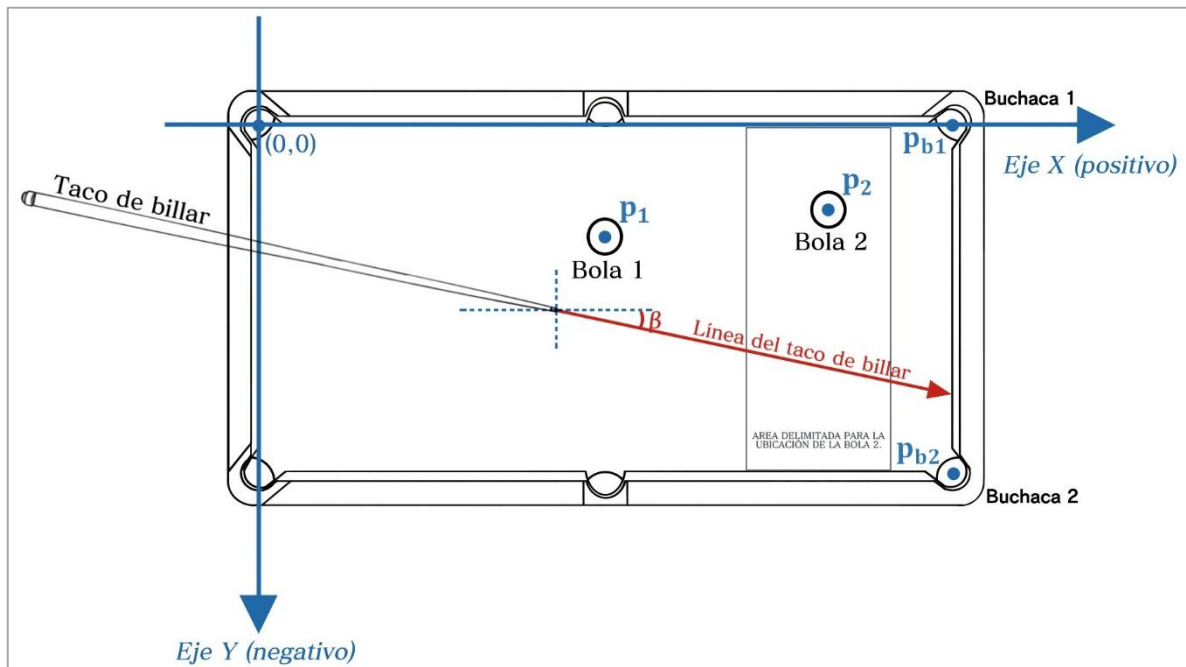


## ECUACIONES DE MOVIMIENTO

### (PRÁCTICA 6: MOMENTO LINEAL Y COLISIONES)

Ing. Francisco Franco – Web: <http://mgfranciscofranco.blogspot.com/>

Fuente de información: Trabajo de grado de Mónica A. Camacho D. y Wilson H. Imbachi M.  
Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones



**Figura 24.** Práctica de momento lineal y colisiones – Sistema general.

La figura 24 muestra el esquema general del juego de billar pool diseñado para la práctica de colisiones. El procedimiento para determinar el ingreso de la bola 2 (bola objetivo) dentro de las buchacas habilitadas se puede realizar con base en el estudio de los subsistemas que componen la totalidad del juego. La primera parte del análisis (numerales 6.1 y 6.2) se realiza considerando que la bola 1 ha sido direccionada correctamente y apunta hacia la bola 2, dando por sentado la colisión entre ambas.

Posteriormente en el numeral 6.3 se establecen los casos posibles de colisión, a partir de los cuales se determinan las direcciones que toman las bolas 1 y 2 después de dicho evento. Finalmente, con base en las direcciones encontradas se calculan las velocidades iniciales de las dos bolas justo después de que han chocado, así como también la velocidad final con que la bola 2 ingresa a la buchaca escogida (numerales 6.4 y 6.5 respectivamente).

### 6.1. Sistema taco de billar – Bola 1:

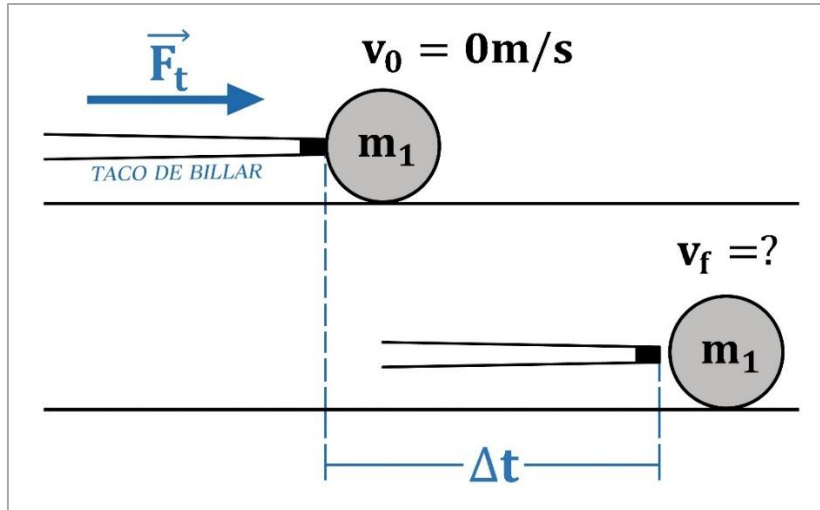


Figura 25. Sistema taco de billar – bola 1.

El primer subsistema que se considera dentro del juego de billar está conformado por la interacción inicial del taco de billar con la bola 1 (bola de impacto), como lo muestra la figura 25. En un instante dado el taco ejerce sobre la bola 1 un impulso ( $I$ ) a través de la fuerza externa  $F_t$ , el cual tiene una corta duración ( $\Delta t$ ), provocando un cambio en el momento inicial de la bola ( $\Delta P$ ). De esta manera el impulso expresado como el cambio del momento de la partícula queda definido de la siguiente forma:

$$I = \Delta P = P_f - P_i = m_1 v_f - m_1 v_i$$

$$I = m_1 v_f \quad (124)$$

Donde  $v_i$  y  $v_f$  corresponden a la velocidad de la bola justo antes y después del impulso dado por la fuerza externa  $F_t$  respectivamente. Para determinar la velocidad final de la bola después de que ha abandonado el taco de billar primero se expresa el impulso como una función del tiempo y se reemplaza en la ecuación (124). De esta nueva expresión se despeja la velocidad final  $v_f$  requerida:

$$I = \Delta t F_t \rightarrow m_1 v_f = \Delta t F_t$$

$$v_f = \frac{\Delta t F_t}{m_1} \quad (125)$$

## 6.2. Movimiento de la bola 1 antes de la colisión:

En un instante posterior al impulso dado por el taco de billar, la bola 1 se dirige hacia la bola 2 con una velocidad inicial  $v_{01}$  equivalente a la velocidad final hallada en el apartado anterior, como se muestra en la figura 26.

$$v_{01} = v_f = \frac{\Delta t F_t}{m_1} \quad (126)$$

Con base en la segunda ley de Newton se calculan los valores respectivos de la fuerza normal ( $N$ ) ejercida por la mesa de billar sobre la bola 1 y la aceleración de esta en dirección  $x$  ( $a_{x1}$ ):

$$\begin{aligned} \sum F_y &= N - m_1 g = 0 \\ N &= m_1 g \end{aligned} \quad (127)$$

$$\begin{aligned} \sum F_x &= -F_R = m_1 a_{x1} \\ -\mu N &= m_1 a_{x1} \\ -\mu m_1 g &= m_1 a_{x1} \\ a_{x1} &= -\mu g \end{aligned} \quad (128)$$

Donde  $\mu$  y  $g$  corresponden al coeficiente de fricción de la superficie de la mesa de billar y a la aceleración gravitacional respectivamente. Con base en la aceleración encontrada para la bola 1 se calcula la velocidad ( $v_{f1}$ ) con que colisiona con la bola 2. Para ello se hace uso de la ecuación de velocidad como función del desplazamiento realizado por la bola del movimiento en una dimensión, considerando que la distancia de separación de las bolas 1 y 2 dentro de la mesa de billar es  $X_0$ . De esta forma  $v_{f1}$  se define como:

$$\begin{aligned} v_{f1}^2 - v_{01}^2 &= 2a_{x1}x_0 \\ v_{f1}^2 &= v_{01}^2 + 2a_{x1}x_0 \\ v_{f1} &= \sqrt{v_{01}^2 + 2a_{x1}x_0} \end{aligned}$$

$$v_{f1} = \sqrt{\left(\frac{\Delta t F_t}{m_1}\right)^2 - 2\mu g x_0} \quad (129)$$

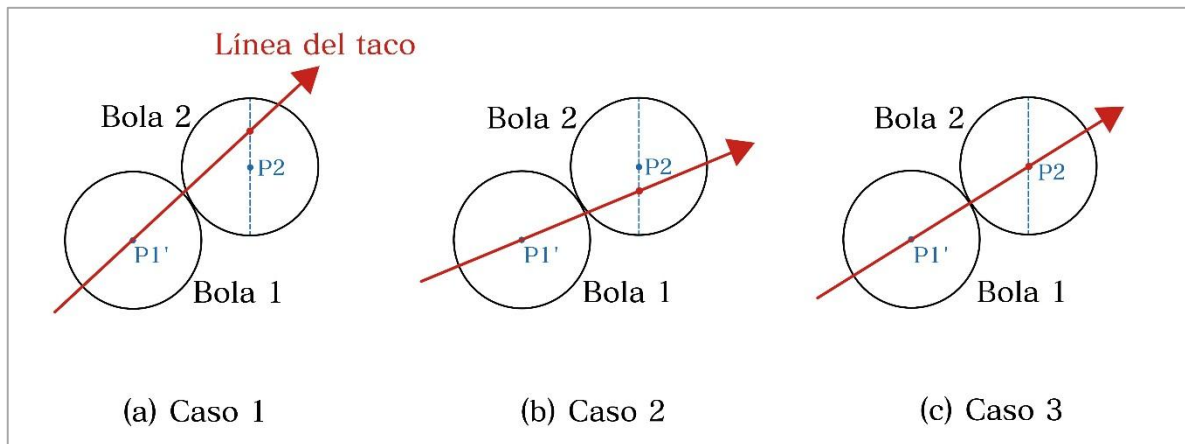
### 6.3. Colisión de las bolas de billar – Parte 1:

Para llevar a cabo el análisis que permita determinar las ecuaciones de movimiento dentro de la presente práctica se considera que:

**A) SI** existe colisión entre las dos bolas de billar.

**B)** La dirección en que apunta el taco de billar (ángulo  $\beta$ ) para golpear la bola 1 es la correcta y permite que la bola 2 sea depositada dentro de la buchaca 1.

Con base en estas suposiciones y con los datos de entrada de  $\beta$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_{b1}$  y  $P_{b2}$  se define el siguiente procedimiento denominado “geometría de la colisión” para determinar las direcciones de las bolas ( $\theta$  y  $\Phi$ ) y sus velocidades después del choque entre ellas.



**Figura 27.** Posibles casos de colisión de las bolas 1 y 2.

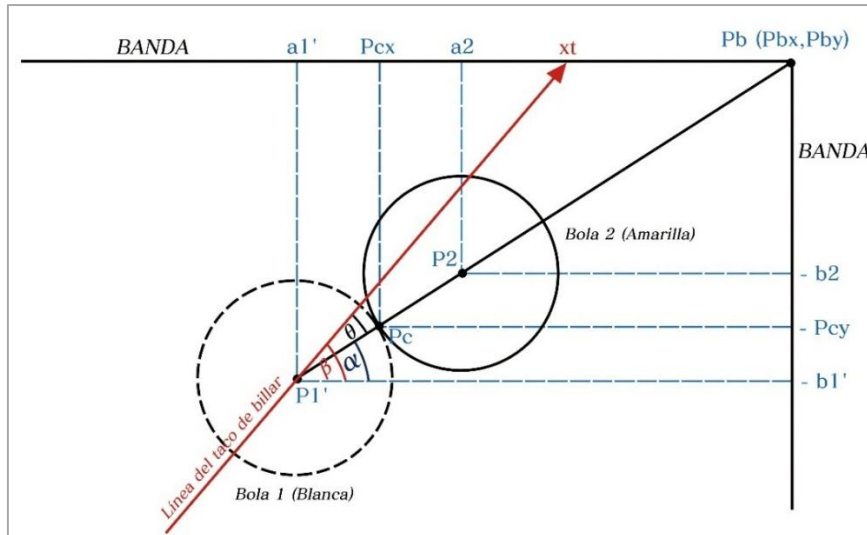
De acuerdo a la figura 27 los casos posibles de colisión entre las bolas son los siguientes:

- **Caso 1 (figura 27-a):** Se da cuando la línea del taco de billar prolongada sobre el centro de la bola 1 en el sitio de colisión pasa por encima del centro de la bola 2.
- **Caso 2 (figura 27-b):** se presenta cuando la línea del taco de billar prolongada sobre el centro de la bola 1 en el sitio de colisión pasa por debajo del centro de la bola 2.

- **Caso 3 (figura 27-c):** se da cuando la línea del taco de billar prolongada sobre el centro de la bola 1 en el sitio de colisión pasa exactamente por el centro de la bola 2.

➤ **GEOMETRÍA DE LA COLISIÓN – CASO 1:**

La figura 28 muestra en detalle la colisión de las bolas 1 y 2 para el primer caso. La construcción geométrica se ha realizado considerando que para una dirección de inclinación del taco de billar (ángulo  $\beta$ ) sobre la bola 1 se consigue ingresar la bola 2 dentro de la buchaca 1, representada por el punto  $P_{b1}$ . Es importante destacar que el punto de contacto de las bolas ( $P_c$ ) siempre estará contenido dentro del segmento que une los centros de estas ( $\overline{P_1' P_2}$ ), y es la dirección de este segmento respecto a la línea del taco de billar (ángulo  $\theta$ ) la que determina hacia donde se va a dirigir la bola 2 después del choque.



**Figura 28.** Caso 1 de colisión.

La descripción completa de los puntos y los ángulos involucrados dentro de esta colisión se realiza en la tabla 1:

Punto/Angulo	Descripción	Coordenadas
$P_1$	Centro de la bola 1 (bola blanca)	$(a_1, -b_1)$
$P_1'$	Centro de la bola 1 (bola blanca) durante la colisión	$(a_1', -b_1')$

$P_2$	Centro de la bola 2 (bola amarilla)	$(a_2, -b_2)$
$P_c$	Punto de contacto de las bolas 1 y 2	$(P_{cx}, -P_{cy})$
$P_{b1}$	Vértice de la buchaca 1	$(P_{b1x}, 0)$
$\beta$	Dirección del taco de billar respecto al eje x	-
$\alpha$	Dirección del segmento $\overline{P_1' P_2}$ respecto al eje x	-
$\theta$	Dirección que toma la bola 2 respecto a la línea del taco después de la colisión	-

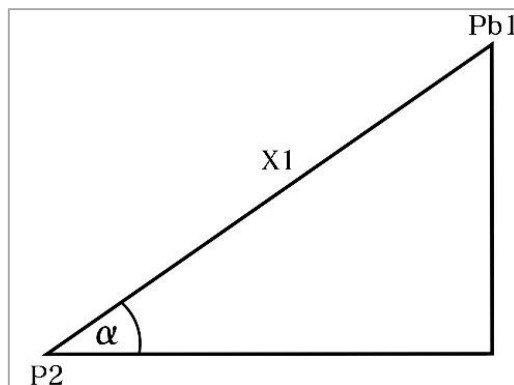
**Tabla 1.** Ángulos y puntos considerados dentro de la colisión de las bolas.

Una vez definidos los elementos de la tabla 1 dentro de la colisión de las bolas de billar se realiza el procedimiento matemático para determinar el valor del ángulo  $\theta$  (el ángulo  $\Phi$  se calcula en un procedimiento posterior). Los pasos son los siguientes:

**Paso 1:** Se determina la distancia desde el centro de la bola 2 hasta el punto que representa a la buchaca 1:

$$\overline{P_2 P_b} = X_1 = \sqrt{(P_{bx} - a_2)^2 + (0 - (-b_2))^2} = \sqrt{(P_{bx} - a_2)^2 + (b_2)^2} \quad (130)$$

**Paso 2:** Con base en el valor del segmento  $X_1$  y las coordenadas de los puntos  $P_2$  y  $P_{b1}$  se halla el valor del ángulo  $\alpha$  (ver figura 29):



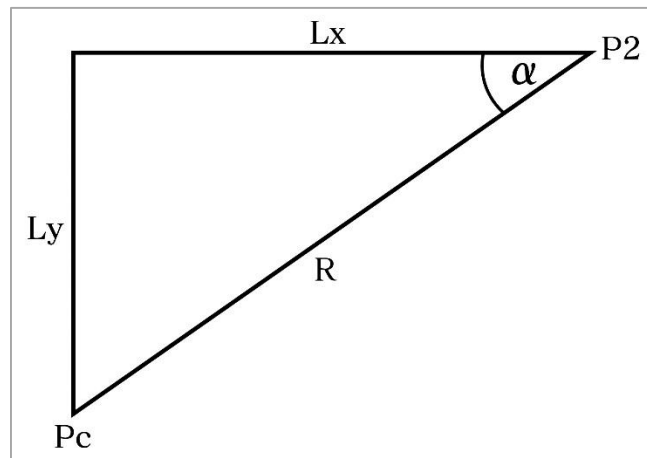
**Figura 29.** Determinación del ángulo  $\alpha$ .

$$\alpha = \sin^{-1} \left[ \frac{(0 - (-b_2))}{X_1} \right] = \sin^{-1} \left( \frac{b_2}{X_1} \right) \quad (131)$$

**Paso 3:** Se calcula la distancia de separación de las bolas de billar ( $\overline{P_1P_2} = C = X_0$ ):

$$\overline{P_1P_2} = C = X_0 = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2} \quad (132)$$

**Paso 4:** Se determinan las coordenadas del punto de contacto ( $P_c$ ) de las bolas 1 y 2 de acuerdo con la figura 30. Para ello se calcula la longitud de los segmentos  $L_x$  y  $L_y$ , después, estos valores son restados respectivamente a las coordenadas en  $x$  y  $y$  del punto  $P_2$ .



**Figura 30.** Determinación del punto de contacto de las bolas 1 y 2.

Los segmentos  $L_x$  y  $L_y$  vienen dados como:

$$\cos \alpha = \frac{L_x}{R} \rightarrow L_x = R \cos \alpha \quad (133)$$

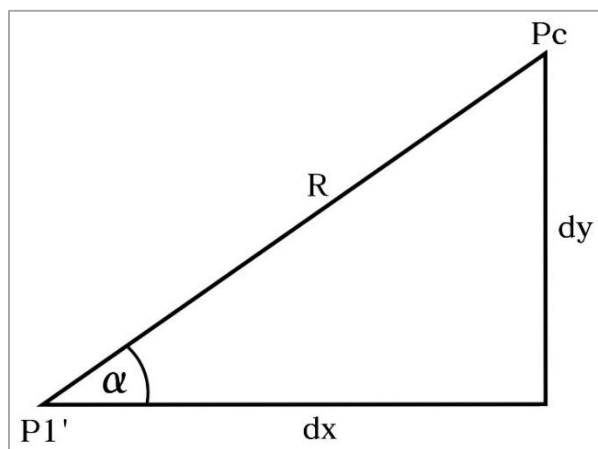
$$\sin \alpha = \frac{L_y}{R} \rightarrow L_y = R \sin \alpha \quad (134)$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto de contacto son:

$$p_{cx} = a_2 - L_x \quad (135)$$

$$p_{cy} = -b_2 - L_y \quad (136)$$

**Paso 5:** Conociendo la posición del punto de contacto ( $P_c$ ) se pueden determinar las coordenadas del centro de la bola 1 ( $P_1'$ ) en el sitio de colisión. De acuerdo a la figura 31 se realiza un procedimiento similar al paso anterior encontrando esta vez las magnitudes de los segmentos  $d_x$  y  $d_y$ , para después restar estos valores a las coordenadas en  $x$  y  $y$  del punto de contacto ( $P_c$ ) respectivamente. Los segmentos  $d_x$  y  $d_y$  vienen dados como:



**Figura 31.** Determinación del centro de la bola 1 en la colisión.

$$\cos \alpha = \frac{d_x}{R} \rightarrow d_x = R \cos \alpha \quad (137)$$

$$\sin \alpha = \frac{d_y}{R} \rightarrow d_y = R \operatorname{sen} \alpha \quad (138)$$

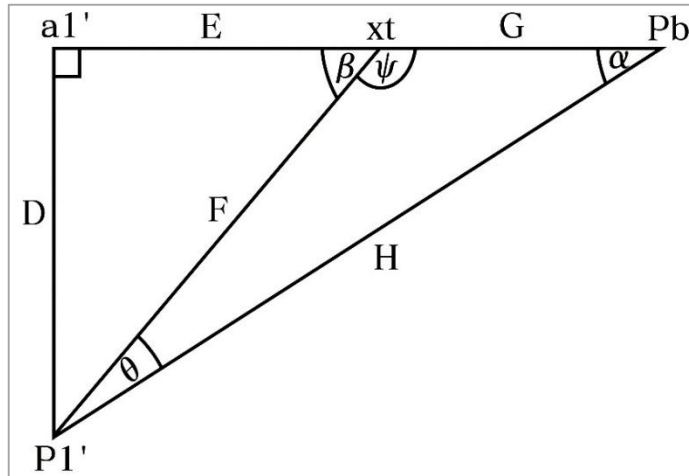
Por lo tanto, las coordenadas del centro de la bola 1 en el sitio de colisión son:

$$a_1' = P_{cx} - d_x \quad (139)$$

$$b_1' = P_{cy} - d_y \quad (140)$$

**Paso 6:** Se determina el valor del ángulo  $\theta$ , tomando como referencia los triángulos que se forman dentro de la colisión y que son mostrados en la figura 32.





**Figura 32.** Determinación del ángulo  $\theta$  – Caso 1 de colisión.

En este punto se deben calcular, de manera secuencial, los valores de los segmentos D, F, E, G y H respectivamente:

$$D = 0 - (-b_1') = b_1' \quad (141)$$

$$F = \frac{D}{\sin \beta} \quad (142)$$

$$E = F \cos \beta \quad (143)$$

$$G = (p_{b1x} - a_1') - E \quad (144)$$

$$H = X_1 + 2R \quad (145)$$

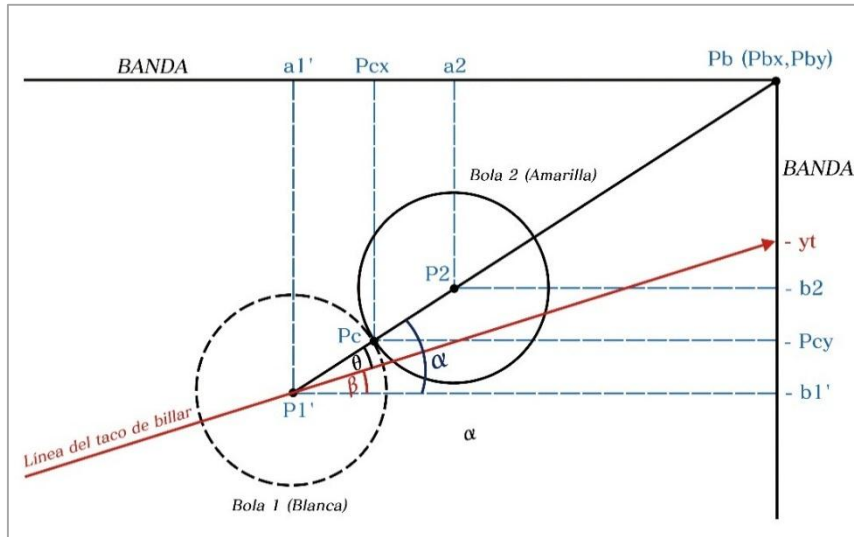
Una vez calculadas las magnitudes de los segmentos del triángulo formado en la colisión de las bolas se determina el ángulo  $\psi$ , suplementario al ángulo  $\beta$ :

$$\psi = 180 - \beta \quad (146)$$

Con estos datos se aplica la ley trigonométrica de los senos para determinar el ángulo  $\theta$  requerido:

$$\frac{\sin \alpha}{F} = \frac{\sin \psi}{H} = \frac{\sin \theta}{G} \quad (147)$$

➤ **GEOMETRÍA DE LA COLISIÓN – CASO 2:**



**Figura 33.** Caso 2 de colisión.

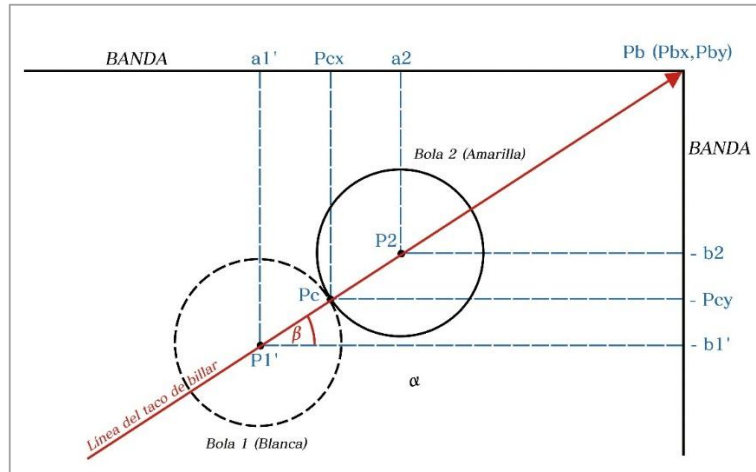
La figura 33 muestra en detalle el segundo caso de posible colisión entre las bolas 1 y 2. El ángulo  $\alpha$  se determina siguiendo el mismo procedimiento visto en el caso 1. Con los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  se calcula el valor del ángulo  $\theta$  (dirección de la bola 2 después de la colisión) de la siguiente forma:

$$\alpha = \theta + \beta \quad (148)$$

$$\theta = \alpha - \beta \quad (149)$$

➤ **GEOMETRÍA DE LA COLISIÓN – CASO 3:**

La figura 34 muestra en detalle la colisión de las bolas 1 y 2 para el tercer caso. Como se puede observar, al estar alineados los centros de las dos bolas con el punto que representa a la buchaca 1, los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  son iguales, de esta forma el ángulo  $\theta$  equivale a  $0^\circ$  y por tanto la bola 2 se mueve en la misma dirección del taco de billar después de la colisión.



**Figura 34.** Caso 3 de colisión.

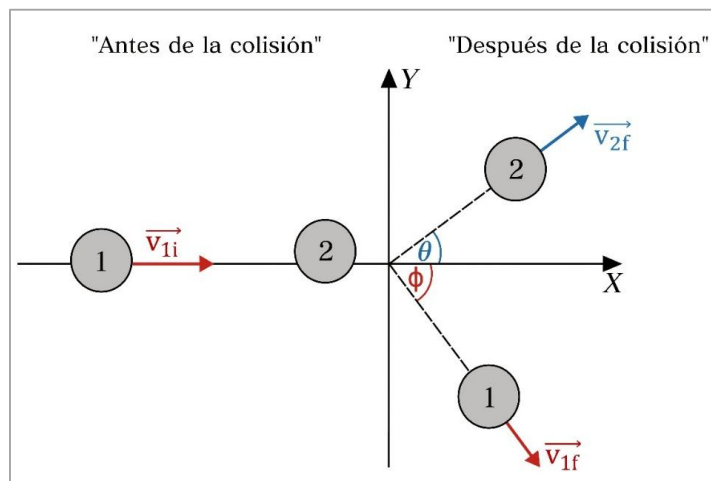
El procedimiento para determinar el ángulo  $\alpha$  es el mismo que en los dos casos anteriores.

$$\alpha = \beta \quad (150)$$

$$\theta = 0 \quad (151)$$

**Nota:** Los tres casos de colisión presentados son generales para cualquier posición de la bola 2, por lo tanto si se escoge la buchaca 2 como objetivo, se realiza un procedimiento similar para encontrar los valores de  $\alpha$  y  $\theta$ .

#### 6.4. Colisión de las bolas de billar – Parte 2:



**Figura 35.** Colisión bidimensional de las bolas de billar.

La figura 35 muestra el tipo de colisión que realizan las bolas de billar (choque elástico) e ilustra los instantes anterior y posterior a dicho evento. Antes del choque las bolas 1 y 2 tienen velocidades  $v_{1i} = v_{f1}$  (hallada en el numeral 6.2) y  $v_{2i} = 0$  respectivamente, mientras que después de la colisión poseen velocidades  $v_{1f}$  y  $v_{2f}$ . Tomando como referencia el valor del ángulo  $\theta$  hallado en el numeral anterior y considerando el ángulo  $\Phi$  (aún sin determinar) como la dirección que toma la bola 1 después de chocar con la bola 2 se definen las componentes rectangulares para estas dos velocidades de la siguiente forma:

$$v_{2fx} = v_{2f} \cos \theta \quad (152)$$

$$v_{2fy} = v_{2f} \sin \theta \quad (153)$$

$$v_{1fx} = v_{1f} \cos \phi \quad (154)$$

$$v_{1fy} = -v_{1f} \sin \phi \quad (155)$$

Para ilustra mejor el proceso de colisión de las bolas se establece un sistema de ejes coordenados en el que el eje  $x$  se sitúa en la misma dirección del movimiento de la bola 1 (dirección  $\beta$ ). Aplicando la ley de conservación del momento para el choque elástico se tiene lo siguiente:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \quad (156)$$

Como el choque es bidimensional se deben considerar dos ecuaciones de componentes para la conservación del momento (componentes en dirección  $x$  y  $y$ ). La conservación del momento en dirección  $x$  viene dada como:

$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx} \quad (157)$$

$$v_{1ix} + v_{2ix} = v_{1fx} + v_{2fx}$$

$$v_{1ix} = v_{1fx} + v_{2fx}$$

$$v_{1ix} = v_{1f} \cos \phi + v_{2f} \cos \theta \quad (158)$$

Antes del choque las bolas 1 y 2 no tienen componentes de velocidad en  $y$ , por lo tanto la conservación del momento en esta dirección queda definido de la siguiente manera:

$$m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = m_1 v_{1fy} + m_2 v_{2fy} \quad (159)$$

$$v_{1iy} + v_{2iy} = v_{1fy} + v_{2fy}$$

$$0 = v_{1fy} + v_{2fy}$$

$$0 = -v_{1f} \sin \phi + v_{2f} \sin \theta \quad (160)$$

De la ecuación (160) se obtiene la expresión de velocidad de la bola 2 después de la colisión ( $v_{2f}$ ):

$$v_{1f} \sin \phi = v_{2f} \sin \theta$$

$$v_{2f} = \frac{v_{1f} \sin \phi}{\sin \theta} \quad (161)$$

Se establece que después del choque las bolas se separan siguiendo trayectorias ortogonales, debido a que las masas de ambas son iguales y que el tipo de choque es elástico. De esta manera se puede determinar el ángulo  $\Phi$  de a siguiente forma:

$$\theta + \phi = 90^\circ$$

$$\theta = 90^\circ - \phi$$

$$\phi = 90^\circ - \theta \quad (162)$$

Reemplazando el valor de  $\Phi$  en la ecuación (162) se obtiene una nueva expresión de  $v_{2f}$  en términos del ángulo  $\theta$ :

$$v_{2f} = \frac{v_{1f} \sin(90^\circ - \theta)}{\sin \theta} = \frac{v_{1f} \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$v_{2f} = v_{1f} \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \quad (163)$$

Reemplazando este nuevo valor de  $v_{2f}$  en la ecuación (158) se llega a la expresión general de  $v_{1f}$ , es decir, la velocidad de la bola 1 después de la colisión en términos de su velocidad inicial:

$$v_{1ix} = v_{1i} = v_{1f} \cos \phi + v_{1f} \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \cos \theta = v_{1f} \cos(90^\circ - \theta) + v_{1f} \left( \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \right)$$

$$v_{1ix} = v_{1i} = v_{1f} \sin \theta + v_{1f} \left( \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \right) = \frac{v_{1f} \sin^2 \theta + v_{1f} \cos^2 \theta}{\sin \theta}$$

$$v_{1i} \sin \theta = v_{1f} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

$$v_{1f} = v_{1i} \sin \theta \quad (164)$$

De esta manera la velocidad de la bola 2 ( $v_{2f}$ ) después del choque queda definida en términos de la velocidad inicial de la bola 1 ( $v_{1i}$ ):

$$v_{2f} = v_{1f} \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) = v_{1i} \sin \theta \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)$$

$$v_{2f} = v_{1i} \cos \theta \quad (165)$$

### 6.5. Movimiento de la bola 2 después de la colisión:

Como punto final se establecen las ecuaciones de movimiento de la bola 2 (bola objetivo) después de haber sido colisionada por la bola 1. En primer lugar se define la velocidad inicial de la bola 2 ( $v_{02}$ ) para este nuevo movimiento, la cual equivale a su velocidad justo después del choque, como se observa en la figura 36:

$$v_{02} = v_{2f} = v_{1i} \cos \theta \quad (166)$$

A partir de la segunda ley de Newton se establecen los valores de la fuerza normal ( $N$ ) y de la aceleración de la bola 2 ( $a_{x2}$ ) respectivamente:

$$\sum F_y = N - m_2 g = 0$$

$$N = m_2 g \quad (167)$$

$$\sum F_x = -F_R = m_2 a_{x2}$$

$$-\mu N = m_2 a_{x2} \rightarrow -\mu m_2 g = m_2 a_{x2}$$

$$a_{x2} = -\mu g \quad (168)$$

Con base en la aceleración encontrada para la bola 2 se calcula la velocidad ( $v_{f2}$ ) con que esta llega a la buchaca 1, teniendo en cuenta que la distancia que las separa es  $X_1$ . De esta forma la velocidad  $v_{f2}$  se define como:

$$v_{f2}^2 - v_{02}^2 = 2a_{x2}x_1$$

$$v_{f2}^2 = v_{02}^2 + 2a_{x2}x_1$$

$$v_{f2} = \sqrt{v_{02}^2 + 2a_{x2}x_1}$$

$$v_{f2} = \sqrt{(v_{1i} \cos \theta)^2 - 2\mu g x_1} \quad (169)$$